السؤال الأول (٣٠ درجة):

(i) يمكن تمثيل المنحني المعطى وسيطياً بالشكل التالي $$z(t)=e^{it} \quad ; \quad t\in[0,\pi]$$ ولحساب قيمة التكامل المعطى نلاحظ أن $\overline{z}(t)=e^{-it}$ و $dz=i\,e^{it}dt$. وبالتالي يصبح التكامل المعطى بالشكل $$I=\int_{\gamma}\overline{z}dz=\int_0^{\pi}e^{-it}\;i\;e^{it}dt=i\int_0^{\pi}dt=i\pi$$	١٠ درجات
(ii) يمكن تمثيل الدائرة $\lvert z-a\rvert=R$ وسيطياً بالشكل التالي $$z(t)=a+R\,e^{it} \quad ; \quad t\in[0,2\pi]$$ ولحساب قيمة التكامل المعطى نلاحظ أن $(z-a)^n=R^n\,e^{int}$ و $dz=i\,R\,e^{it}dt$. وبالتالي يصبح التكامل المعطى بالشكل $$I=\int_0^{2\pi}R^n\,e^{int}\;i\;R\,e^{it}dt=i\,R^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}dt$$ فإذا كانت $n+1=0$، أي أن $n=-1$، يكون $$I=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i$$ وإذا كانت $n+1\neq 0$، أي أن $n\neq -1$، يكون $$I=i\,R^{n+1}\left[\frac{1}{i\,(n+1)}e^{i(n+1)t}\right]_0^{2\pi}=\frac{R^{n+1}}{n+1}\left[e^{i(n+1)t}\right]_0^{2\pi}=\frac{R^{n+1}}{n+1}\left[e^{2\pi(n+1)i}-e^0\right]=0$$	٢٠ درجة

مدرس المقرر:
أ. د. محمد شعيب العلي

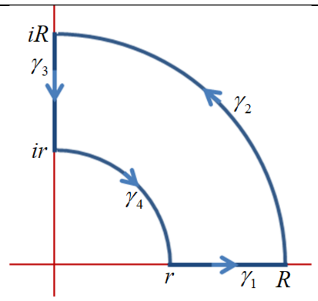
عميد الكلية:
د. نورس الهلامي

السؤال الثاني (٣٥ درجة):

(i) نلاحظ أن $$f(z)=\frac{2}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-(-1/z)}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-(-z/3)} \qquad (*)$$ الآن من أجل الدالة $\frac{1}{1-(-1/z)}$، وطالما أن $\lvert -1/z\rvert<1$، أي أن $\lvert z\rvert>1$، يكون $$\frac{1}{1-(-1/z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1/z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} \qquad (1)$$ ومن أجل الدالة $\frac{1}{1-(-z/3)}$، وطالما أن $\lvert -z/3\rvert<1$، أي أن $\lvert z\rvert<3$، يكون $$\frac{1}{1-(-z/3)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z/3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1/3)^n z^{n} \qquad (2)$$ وبدمج العلاقتين (1) و (2) وتعويضهما في العلاقة $(*)$، نجد أنه طالما أن $1<\lvert z\rvert<3$، يكون $$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1/3)^n z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-(n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1/3)^{n+1} z^{n}$$	٢٠ درجة
(ii) نلاحظ أن النقطة $z_0=1$ هي النقطة الشاذة الوحيدة لتابع التكامل $\frac{Cos(z)}{z^2(z-1)}$ داخل المنحني γ المعطى، وأن هذا التابع يمكن كتابته على الشكل $$\frac{Cos(z)}{z^2(z-1)}=\frac{f(z)}{z-1} \quad ; \quad f(z)=\frac{Cos(z)}{z^2}$$ مما يعني أن النقطة الشاذة $z_0=1$ هي قطب من المرتبة الأولى لتابع التكامل داخل منحني التكامل γ. وبالتالي وحسب علاقة كوشي التكاملية تكون قيمة التكامل المطلوب هي $$\int \frac{Cos(z)}{z^2(z-1)}dz=2\pi i\ f(z_0)=2\pi i\ f(1)=2\pi i\ \frac{Cos(1)}{1^2}=2\pi i\ Cos(1)$$	١٥ درجة

السؤال الثالث (٣٥ درجة):

يوضح الشكل المجاور منطقة التكامل المعطاة والمحصورة بين قوسي الدائرتين $|z|=r$ و $|z|=R$ والواقعة في الربع الأول من المستوي العقدي، حيث أن $r<R$.



وبمكاملة التابع e^{iz^2}/z على المنطقة الواقعة داخل المنحني $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$، وبملاحظة أن تابع التكامل تحليلي على هذه المنطقة، نستنتج أن قيمة هذا التكامل معدومة. أي أن

$$\int_{\gamma}\frac{e^{iz^2}}{z}dz=0 \quad\Rightarrow\quad \int_{\gamma_1}\frac{e^{iz^2}}{z}dz+\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz^2}}{z}dz+\int_{\gamma_3}\frac{e^{iz^2}}{z}dz+\int_{\gamma_4}\frac{e^{iz^2}}{z}dz=0$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما $R\to\infty$ و $r\to 0$، نجد أن

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{\gamma_1}\frac{e^{iz^2}}{z}dz+\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz^2}}{z}dz+\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{\gamma_3}\frac{e^{iz^2}}{z}dz+\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{\gamma_4}\frac{e^{iz^2}}{z}dz=0 \quad .... \quad (*)$$

وسنقوم بحساب كل تكامل من التكاملات الموجودة في العلاقة $(*)$ على حدى.

١٠ درجات

التكامل الأول: يعطى التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة γ_1 بالشكل $z(x)=x \;;\; x\in[r,R]$. وبالتالي فإن $dz=x$، ويصبح التكامل بالشكل

$$\int_{\gamma_1}\frac{e^{iz^2}}{z}dz=\int_r^R\frac{e^{ix^2}}{x}dx=\int_r^R\frac{Cos\left(x^2\right)+i\;Sin\left(x^2\right)}{x}dx$$

$$=\int_r^R\frac{Cos\left(x^2\right)}{x}dx+i\int_r^R\frac{Sin\left(x^2\right)}{x}dx \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{\gamma_1}\frac{e^{iz^2}}{z}dz=\int_0^{\infty}\frac{Cos\left(x^2\right)}{x}dx+i\int_0^{\infty}\frac{Sin\left(x^2\right)}{x}dx}$$

٥ درجات

٦ درجات	**التكامل الثاني:** يعطى التمثيل الوسيطي للقوس γ_2 بالشكل $z(x)=R\ e^{i\,t}\ ;\ t\in[0,\pi/2]$. وبالتالي فإن $z^2=R^2e^{2it}=R^2\left[Cos(2t)+i\ Sin(2t)\right]$ و $dz=i\ R\ e^{i\,t}dt$، ويصبح التكامل بالشكل $$\int_{\gamma_2}\frac{e^{i\,z^2}}{z}dz=\int_0^{\pi/2}\frac{e^{i\,R^2[Cos(2t)+i\ Sin(2t)]}}{R\ e^{i\,t}}i\ R\ e^{i\,t}dt=\int_0^{\pi/2}i\ e^{i\,R^2[Cos(2t)+i\ Sin(2t)]}dt$$ وبما أن $$\left\|\int_{\gamma_2}\frac{e^{i\,z^2}}{z}dz\right\|=\left\|\int_0^{\pi/2}i\ e^{i\,R^2[Cos(2t)+i\ Sin(2t)]}dt\right\|\le\int_0^{\pi/2}\left\|i\ e^{i\,R^2[Cos(2t)+i\ Sin(2t)]}\right\|dt$$ $$\le\int_0^{\pi/2}e^{-R^2Sin(2t)}dt\xrightarrow[R\to\infty]{}\int_0^{\pi/2}e^{-\infty}dt=\int_0^{\pi/2}0\ dt=0$$ وبالتالي نستنتج أن $$\boxed{\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to0}}\int_{\gamma_2}\frac{e^{i\,z^2}}{z}dz=0}$$
٥ درجات	**التكامل الثالث:** يعطى التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $-\gamma_3$ بالشكل $z(x)=i\ y\ ;\ y\in[r,R]$. وبالتالي فإن $dz=i\ dy$، ويصبح التكامل بالشكل $$\int_{\gamma_3}\frac{e^{i\,z^2}}{z}dz=-\int_{-\gamma_3}\frac{e^{i\,z^2}}{z}dz=-\int_r^R\frac{e^{-i\,y^2}}{i\ y}i\ dy=-\int_r^R\frac{Cos(-y^2)+i\ Sin(-y^2)}{y}dy$$ $$=-\int_r^R\frac{Cos(y^2)-i\ Sin(y^2)}{y}dy=-\int_r^R\frac{Cos(y^2)}{y}dy+i\int_r^R\frac{Sin(y^2)}{y}dy\ \Rightarrow$$ $$\boxed{\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to0}}\int_{\gamma_1}\frac{e^{i\,z^2}}{z}dz=-\int_0^\infty\frac{Cos(x^2)}{x}dx+i\int_0^\infty\frac{Sin(x^2)}{x}dx}$$

مدرس المقرر: أ. د. محمد شعيب العلي

عميد الكلية: د. نورس الهلامي

التكامل الرابع: يعطى التمثيل الوسيطي للقوس $-\gamma_4$ بالشكل $z(x)=r\,e^{i\,t}\ ;\ t\in[0,\pi/2]$. وبالتالي

فإن $z^2=r^2e^{2it}=r^2\left[Cos(2t)+i\ Sin(2t)\right]$ و $dz=i\ r\ e^{i\,t}dt$، ويصبح التكامل بالشكل

$$\int_{\gamma_4}\frac{e^{i\,z^2}}{z}dz=-\int_{-\gamma_4}\frac{e^{i\,z^2}}{z}dz=-\int_0^{\pi/2}\frac{e^{ir^2\left[Cos(2t)+i\ Sin(2t)\right]}}{r\ e^{i\,t}}ire^{i\,t}dt=-i\int_0^{\pi/2}e^{i\ r^2\left[Cos(2t)+i\ Sin(2t)\right]}dt$$

وبالتالي يكون

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{\gamma_4}\frac{e^{i\,z^2}}{z}dz=-i\int_0^{\pi/2}e^0dt=-i\int_0^{\pi/2}dt=-i\,[t]_0^{\pi/2}=-i\,\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{\gamma_4}\frac{e^{i\,z^2}}{z}dz=-i\,\frac{\pi}{2}}$$

٦ درجات

وبتعويض نهايات التكاملات الأربعة السابقة في العلاقة $(*)$، نجد أن

$$\int_0^\infty\frac{Cos\left(x^2\right)}{x}dx+i\int_0^\infty\frac{Sin\left(x^2\right)}{x}dx+0-\int_0^\infty\frac{Cos\left(x^2\right)}{x}dx+i\int_0^\infty\frac{Sin\left(x^2\right)}{x}dx-i\,\frac{\pi}{2}=0\ \Rightarrow$$

$$2i\int_0^\infty\frac{Sin\left(x^2\right)}{x}dx-i\,\frac{\pi}{2}=0\ \Rightarrow\ \boxed{\int_0^\infty\frac{Sin\left(x^2\right)}{x}dx=\frac{\pi}{4}}$$

٣ درجات

انتهى سلم التصحيح (خمس صفحات)

مدرس المقرر:
أ. د. محمد شعيب العلي

عميد الكلية:
د. نورس الهلامي